Problema 2.11.

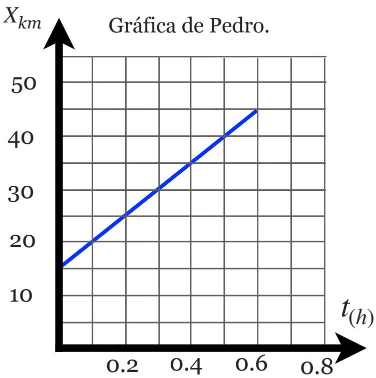
Palabras clave: gráfica de posición contra tiempo, uso de diferentes sistemas de coordenadas, escribir ecuación de movimiento, gráfica de velocidad contra tiempo.

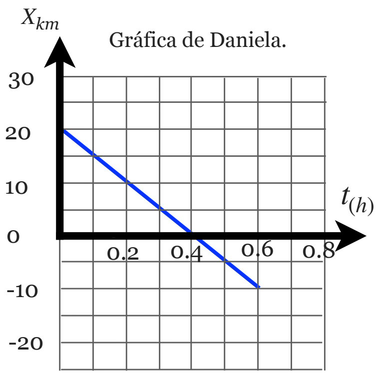
Pedro realizó una gráfica de posición contra tiempo para un bus que se mueve con velocidad constante. Daniela realizó una gráfica de posición contra tiempo para el mismo bus.

(a) Según las gráficas, explique qué sistema de coordenadas usó Pedro y qué sistema usó Daniela y escriba la ecuación de movimiento del bus según Pedro y Daniela.

(b) Según lo anterior, ¿cómo sería la gráfica de velocidad para Pedro y para Daniela?

(c) Usando la gráficas de velocidad del punto anterior, diga cuánta distancia recorrió el bus en 24 minutos según Pedro y Daniela.





Solución

¿Qué información nos dan?

Para todos los numerales nos dan gráficas de posición contra tiempo hechas por Pedro y Daniela.

¿Qué nos piden?

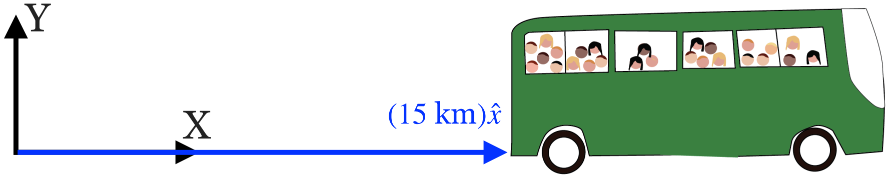
(a) Explicar qué sistema de coordenadas usaron Daniela y Pedro, y escribir las ecuaciones de movimiento del bus según esos sistemas.

(b) Realizar la gráfica de velocidad del bus según Pedro y Daniela.

(c) De acuerdo al numeral (b), decir cuánta distancia recorrió el bus en 24 minutos.

a) Necesitamos inferir qué sistema de coordenadas usaron Pedro y Daniela. Empecemos por analizar la gráfica de Pedro.

Según la gráfica de Pedro, la posición inicial del bus es $x_i\hat{x} = (15\text{ km})\hat{x}$. Por lo tanto, Pedro usó un sistema de coordenadas según el cual el bus inicialmente estaba a una distancia de 15 km en el sentido positivo del eje X. Además, la pendiente de la línea es positiva, lo que indica que la velocidad del bus según Pedro es positiva. Esto quiere decir que el bus se mueve en la dirección positiva del eje X. Sólo con esta información, ya sabemos que Pedro usó el siguiente sistema de coordenadas:



Para escribir la ecuación de movimiento del bus según el sistema de Pedro, necesitamos saber la velocidad del bus. Esta velocidad se puede inferir a partir de la pendiente de la gráfica de posición contra tiempo. La magnitud de la pendiente nos indica la rapidez, y el signo de la pendiente nos indica la dirección de la velocidad.

Recordemos que la pendiente se calcula tomando dos puntos cualesquiera por los que pasa la línea, y calculando la razón entre la diferencia en Y de ambos puntos, y la diferencia en X de ambos puntos. Por ejemplo, si escogemos los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1}$$

Si la ecuación (1) nos da positiva, la pendiente es positiva, si nos da negativa, la pendiente es negativa. Si realizamos esta operación para la gráfica de posición contra tiempo de Pedro, tomando los puntos inicial y final (podemos tomar otros puntos si queremos), obtenemos

$$v = \frac{45\text{ km} - 15\text{ km}}{0.6\text{ h} - 0\text{ h}} = \frac{30\text{ km}}{0.6\text{ h}} = 50\text{ km/h}. \tag{2}$$

Como el resultado nos dio positivo, la velocidad es positiva:

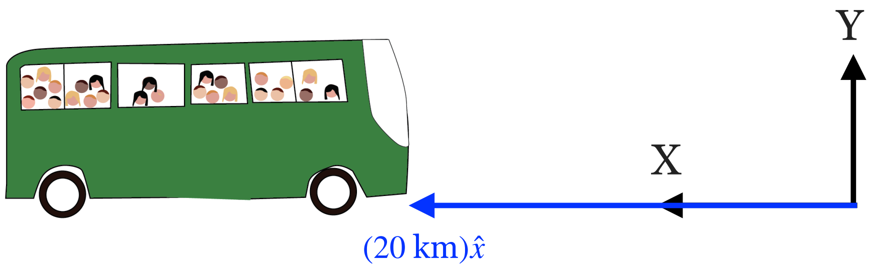
$$\vec{v} = (50\text{ km/h})\hat{x}. \tag{3}$$

Una vez tenemos la velocidad y la posición inicial del bus, podemos escribir la ecuación de movimiento para el bus según el sistema de Pedro:

$$x_p\hat{x} = \underbrace{(50\ \text{km/h})}_{v}\, t\hat{x} + \underbrace{(15\ \text{km})\hat{x}}_{\vec{x}_i}, \tag{4}$$

donde x_p tiene el subíndice p para recordarnos que esta es la ecuación según Pedro.

En el caso de Daniela, de su gráfica podemos inferir que la posición inicial del bus es $x_i\vec{x} = (20\ \text{km})\hat{x}$. Además, la pendiente de la gráfica es negativa, lo que significa que el bus se está moviendo en la dirección negativa del eje X. Por lo tanto, debemos construir un sistema de coordenadas según el cual la posición inicial sea de 20 km en el sentido positivo de X, y según el cual el bus se esté moviendo en la dirección negativa de X. Ese sistema sería el siguiente:



Ahora debemos calcular la velocidad del bus según Daniela. La pendiente de la gráfica de Daniela es

$$v = \frac{-10\ \text{km} - 20\ \text{km}}{0.6\ \text{h} - 0\ \text{h}} = \frac{-30\ \text{km}}{0.6\ \text{h}} = -50\ \text{km/h}. \tag{5}$$

Como el resultado es negativo, la velocidad del bus es negativa según el sistema de Daniela:

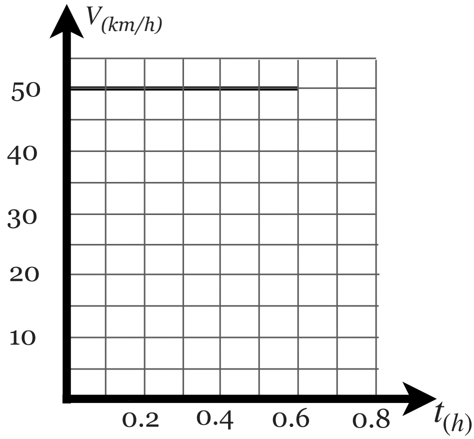
$$\vec{v} = -(50\ \text{km/h})\hat{x}. \tag{6}$$

Dada esta velocidad y la posición inicial del bus según Daniela, la ecuación de movimiento es

$$x_d\hat{x} = \underbrace{-(50\ \text{km/h})}_{v}\, t\hat{x} + \underbrace{(20\ \text{km})\hat{x}}_{\vec{x}_i}, \tag{7}$$

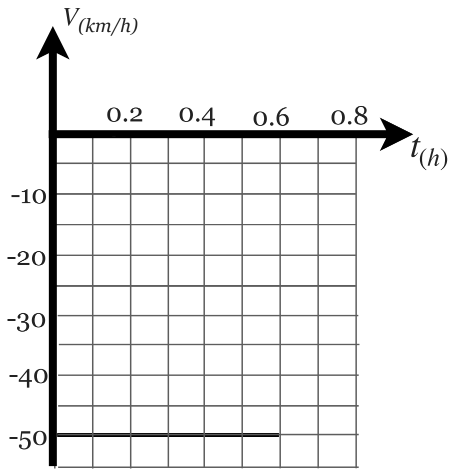
donde el subíndice d en el término x_d nos recuerda que esta es la ecuación de movimiento según Daniela. Es claro que las ecuaciones (7) y (4) son diferentes. Sin embargo, como ya vimos en problemas anteriores, la escogencia del sistema no es relevante para cantidades escalares como la rapidez, el tiempo o la distancia.

(b) Como es un movimiento con velocidad constante, la gráfica de velocidad contra tiempo debe ser una línea horizontal que corta el eje Y en la velocidad que tenga el objeto (si la velocidad es negativa, corta el eje Y en la parte negativa). Según la ecuación (3), la velocidad es $\vec{v} = (50\ \text{km/h})\hat{x}$. Así, la gráfica de velocidad para Pedro es



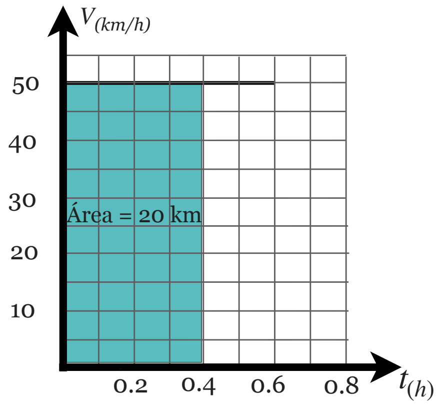
Gráfica de velocidad contra tiempo según Pedro.

Según la ecuación (6), para Daniela la velocidad es $\vec{v} = -(50\ \text{km/h})\hat{x}$. Por lo tanto, la gráfica de velocidad debe cortar el eje Y en la parte negativa:



Gráfica de velocidad contra tiempo según Daniela.

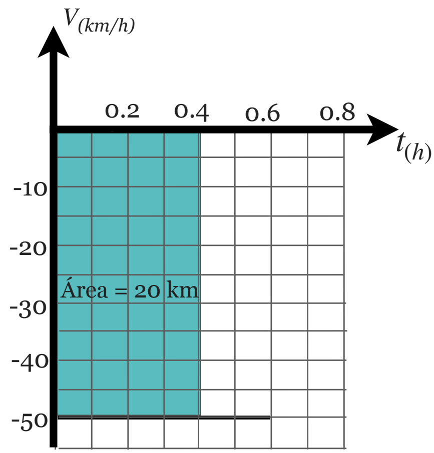
(c) Ahora debemos calcular cuánta distancia recorrió el bus en 24 minutos a partir de las gráficas de velocidad. Como dice la nota 2.14, el área encerrada entre la línea de la velocidad y el eje X nos da la distancia recorrida. Pero no queremos la distancia total, sino sólo la distancia entre 0 y 24 minutos. Por lo tanto, debemos buscar el área encerrada entre el tiempo cero y 24 minutos. Como la gráfica está en horas, debemos pasar minutos a horas. Si dividimos una hora entre cinco, obtenemos intervalos de 12 minutos. Por lo tanto, 0.2 horas son 12 minutos, 0.4 son 24 minutos y así sucesivamente. Así, queremos buscar el área entre 0 y 0.4 horas. Empecemos con la gráfica de Pedro:



El área del rectángulo es 50 km/h por 0.4 h, es decir, 20 km.

En 24 minutos (0.4 horas), el bus recorrió 20 kilómetros.

Como el lector puede imaginar, el mismo resultado se obtiene para Daniela:



Aquí también el área del rectángulo es de 50 km/h por 0.4 h, es decir, 20 km.

Notemos que en la gráfica de Daniela la velocidad es negativa, pero eso no importa. Como dice la nota 2.14, el área encerrada sigue siendo la distancia recorrida.

Por supuesto, si conocemos la rapidez y el tiempo podemos calcular la distancia directamente, usando $d = vt$. Por ejemplo, en este caso $v = 50$ km/h y $t = 0.4$ h, así que $(50 \text{ km/h}) \times (0.4 \text{ h}) = 20$ km.

Cuidado: cuando hacemos la operación para sacar el área, nos olvidamos del signo de la velocidad, y sólo estamos teniendo en cuenta la rapidez. Si tuviéramos en cuenta el signo, entonces el signo negativo indicaría que el *desplazamiento* fue negativo, pero la distancia, que es la magnitud del desplazamiento, es siempre positiva. Por otro lado, es claro que las unidades de área son de longitud al cuadrado (metro cuadrado, kilometro cuadrado, etc.). El "área" de las figuras anteriores no tiene estas unidades de área sino sólo unidades de longitud o distancia (20 km, por ejemplo). Cuando decimos que el área es la distancia, lo que queremos decir es que si multiplicamos la base por la altura, sin importar qué unidades tienen la base y la altura, el *número* que da corresponde a la distancia.