Problema 2.22.

Palabras clave: rapidez final sin conocer el tiempo, encuentro de dos objetos que terminan con la misma velocidad.

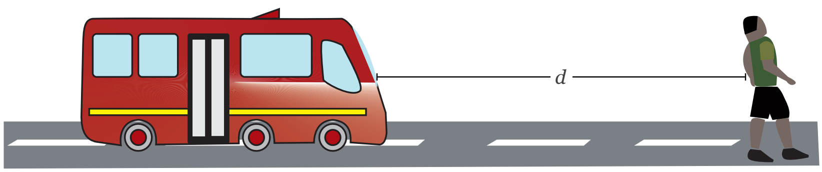
Un bus de Transmilenio lleva una rapidez v_t. Cuando el conductor del bus se da cuenta de que una persona está caminando por el carril de Transmilenio presiona los frenos. La persona está caminando con una rapidez v_p y en la misma dirección en la que anda el bus, como se ilustra en el dibujo. Suponga que el bus disminuyó su rapidez hasta v_p (hasta la rapidez de la persona) justo cuando se puso atrás de la persona, y suponga que la distancia que los separaba cuando el conductor comenzó a frenar era d.

(a) Escriba una expresión para la aceleración del bus que resultó al aplicar los frenos.

(b) Escriba una expresión para la distancia que alcanzó a recorrer el bus hasta que alcanzó a la persona.

(c) Realice una gráfica cualitativa de posición contra tiempo para el bus, y en la misma gráfica, para la persona. Realice esta gráfica desde el momento en que el bus comienza a frenar hasta que alcanza a la persona.

(d) Si el bus siguiera frenando de la misma forma, escriba una expresión para el tiempo en el cual se detendría completamente. Con base en su resultado, analice el caso en que v_p y v_t son iguales.



Solución

¿Qué información nos dan?

Para (a), (b) y (c): la velocidad inicial del bus tiene magnitud v_t. Cuando comienza a frenar, el bus está a una distancia d de una persona que camina con velocidad constante de magnitud v_p en la misma dirección que la velocidad del bus. El bus frena de forma tal que cuando alcanza a la persona, tiene la misma velocidad que ella.
(d) Desde que alcanza a la persona, suponga que el bus sigue frenando de la misma forma.

¿Qué nos piden?

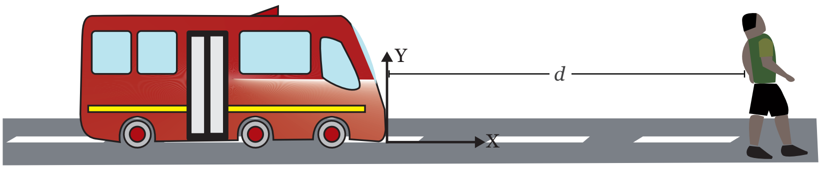
(a) Escribir una expresión para la aceleración del bus.

(b) Escribir una expresión para la distancia recorrida por el bus desde que comienza a frenar hasta que alcanza a la persona.

(c) Realizar una gráfica cualitativa de posición contra tiempo para el bus y para la persona (una para ambos), desde que el bus comienza a frenar hasta que alcanza a la persona.

(d) Escribir una expresión para el tiempo en el cual el bus se detiene completamente. Debemos analizar el caso en que v_p y v_t son iguales.

(a) Como ya sabemos, lo primero que hay que hacer en problemas de cinemática es escoger un sistema de coordenadas. Es natural (pero no es obligatorio) usar un sistema en el cual el bus y la persona se mueven en la dirección positiva de X. Además es conveniente usar un sistema según el cual el bus esté en el origen justo cuando empiece a frenar (según ese sistema, la persona está inicialmente a una distancia d en el sentido positivo de X):



Para hallar una expresión para la aceleración del bus necesitamos la velocidad inicial y final, y el tiempo que dura la aceleración. La velocidad final en este caso es de magnitud v_p en el sentido positivo de X según nuestro sistema, y la velocidad inicial es de magnitud v_t en el sentido positivo de X. Si escribimos la ecuación para la aceleración del bus, tenemos

$$\vec{a} = \frac{v_p\hat{x} - v_t\hat{x}}{t}. \tag{1}$$

Esto es lo mismo que

$$\vec{a} = \frac{v_p - v_t}{t}\hat{x}. \tag{2}$$

Notemos que la resta de v_p con v_t nos va a dar un número negativo, pues v_p es menor que v_t. Era de esperarse que esta resta nos diera un número negativo, pues la aceleración nos tiene que dar con signo negativo ya que, según nuestro sistema, el bus se está moviendo en la dirección positiva de X mientras aplica los frenos. Aunque conocemos v_p y v_t, todavía no conocemos el tiempo t. Para hallarlo necesitamos más información.

En el enunciado nos dicen que la persona camina con velocidad constante v_p. Además, nos dicen la distancia inicial entre el bus y la persona, y nos dicen que el bus alcanza rapidez v_p justo antes de alcanzar a la persona. Esto quiere decir que cuando el bus llega a la rapidez v_p, en ese instante su posición es la misma que la de la persona. Así, podemos igualar la posición final dada por la ecuación de movimiento del bus y de la persona, y de ahí podemos obtener el tiempo t en que se encuentran.

Como el bus se mueve con aceleración constante, esperamos que su ecuación de movimiento sea de la forma

$$\vec{x}_f = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}t + \vec{x}_i. \tag{3}$$

Ahora bien, según nuestro sistema, la velocidad inicial del bus es $v_t\hat{x}$ y la posición inicial es cero. Además, podemos escribir la aceleración $\vec{a}$ usando la ecuación (2). Por lo tanto, la ecuación de movimiento del bus es

$$x_{ft}\hat{x} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{v_p - v_t}{t}\right)}_{a} t^2\hat{x} + v_t t\hat{x}. \tag{4}$$

(Hemos llamado "$x_{ft}\hat{x}$" a la posición final del bus).

Alguien podría decir que el término con la aceleración debería tener un signo menos, pues el bus está frenando (así que la dirección de la aceleración debería ser $-\hat{x}$). Sin embargo, el signo menos ya está implícitamente en la ecuación (4) porque, como dijimos, v_p es menor que v_t así que la resta que aparece da negativa. Si pusiéramos el signo negativo al frente del factor de $1/2$ para indicar que la aceleración es negativa, cometeríamos un error porque la ecuación (2) ya nos da el signo, así que estaríamos repitiendo dos signos menos, lo que nos daría un signo más.

Ahora escribamos la ecuación de movimiento de la persona. La persona camina con velocidad constante en línea recta así que esperamos que su ecuación de movimiento sea de la forma

$$\vec{x}_f = \vec{v}t + \vec{x}_i. \tag{5}$$

Según el sistema elegido, la velocidad de la persona es $v_p\hat{x}$ y la posición inicial de la persona es $d\hat{x}$. Por lo tanto, la ecuación de movimiento de la persona es

$$x_{fp}\hat{x} = v_p t\hat{x} + d\hat{x}. \tag{6}$$

Para hallar el tiempo t en el cual se encuentran la persona y el Transmilenio, debemos igualar las posiciones finales de ambos:

$$\underbrace{v_p t\hat{x} + d\hat{x}}_{x_{fp}\hat{x}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{v_p - v_t}{t}\right) t^2\hat{x} + v_t t\hat{x}}_{x_{ft}\hat{x}}. \tag{7}$$

Ahora podemos aplicar la regla de oro:

$$v_p t + d = \frac{1}{2}\left(\frac{v_p - v_t}{t}\right)t^2 + v_t t. \tag{8}$$

En esta ecuación aparece una incógnita, el tiempo t. Notemos que t^2 se simplifica con el t que está en el denominador:

$$v_p t + d = \frac{1}{2}\left(v_p - v_t\right)t + v_t t. \tag{9}$$

Ahora pasemos el término $v_p t$ a la derecha para que todos los términos que tienen el tiempo queden a un solo lado:

$$d = \frac{1}{2}\left(v_p - v_t\right)t + v_t t - v_p t. \tag{10}$$

Si sacamos el factor común del tiempo t, obtenemos

$$d = \left(\frac{1}{2}\left(v_p - v_t\right) + v_t - v_p\right)t. \tag{11}$$

Si sumamos los términos que están dentro del paréntesis obtenemos

$$d = \left(0.5v_t - 0.5v_p\right)t. \tag{12}$$

Finalmente, dividimos por el término entre paréntesis para despejar el tiempo:

$$\frac{d}{0.5v_t - 0.5v_p} = \frac{2d}{v_t - v_p} = t, \tag{13}$$

donde usamos el hecho de que 0.5 es 1/2. Esta ecuación nos da el tiempo de encuentro en función de cantidades conocidas como la rapidez inicial del bus, la rapidez de la persona y la distancia que los separa inicialmente. Como v_t es mayor que v_p, esta ecuación nos da positiva, lo cual tiene sentido porque el tiempo tiene que ser positivo. Finalmente, podemos usar este tiempo en la ecuación (2), para escribir la aceleración del bus:

$$\vec{a} = \frac{v_p - v_t}{\underbrace{\left(\frac{2d}{v_t - v_p}\right)}_{t}}\hat{x}. \tag{14}$$

Esto es lo mismo que

$$\vec{a} = \frac{(v_p - v_t)(v_t - v_p)}{2d}\hat{x}. \tag{15}$$

Notemos que en el numerador tenemos la multiplicación de dos términos que son iguales, salvo por un signo menos. Podemos, por ejemplo, poner un signo menos delante del primer término y reescribirlo así:

$$\vec{a} = \frac{-(v_t - v_p)(v_t - v_p)}{2d}\hat{x} = \frac{-(v_t - v_p)^2}{2d}\hat{x}. \tag{16}$$

La ecuación (16) nos da la aceleración del bus. Notemos que el término al cuadrado, como todo término al cuadrado, es positivo. Por lo tanto, el signo menos que está al frente no se pierde nunca, lo que garantiza que la dirección de la aceleración sea negativa, como esperábamos. Además, notemos que como la distancia que separa al bus de la persona está en el denominador, entonces es claro que cuanto mayor sea la distancia, menor será la magnitud de la aceleración, lo cual tiene sentido (si el bus está muy lejos de la persona, no tiene que frenar bruscamente).

(b) Recordemos que la distancia recorrida por un objeto con aceleración constante está dada por

$$d = \left\| \frac{1}{2}at^2 + v_i t \right\|. \tag{17}$$

Teniendo en cuenta el tiempo que dura frenando el bus —ecuación (13)—, su velocidad inicial y su aceleración —ecuación (16)—, esta ecuación queda

$$d_t = \left\| -\frac{1}{2}\underbrace{\frac{(v_t - v_p)^2}{2d}}_{a}\underbrace{\left(\frac{2d}{v_t - v_p}\right)^2}_{t} + v_t \underbrace{\left(\frac{2d}{v_t - v_p}\right)}_{t} \right\|. \tag{18}$$

(Hemos llamado d_1 a la distancia recorrida por el bus). En el primer término se simplifican algunas cosas, hasta que llegamos a

$$d_t = \left\| -d + v_t\left(\frac{2d}{v_t - v_p}\right) \right\|. \tag{19}$$

Si sacamos el factor común de d, esta ecuación se puede escribir como

$$d_t = \left\| d\left(\left(\frac{2v_t}{v_t - v_p}\right) - 1\right) \right\|. \tag{20}$$

Al hacer la suma de fracciones esto queda

$$d_t = \left\| d\left(\frac{2v_t - v_t + v_p}{v_t - v_p}\right)\right\|. \tag{21}$$

Finalmente, obtenemos

$$d_t = \left\| d\left(\frac{v_t + v_p}{v_t - v_p}\right)\right\|. \tag{22}$$

Notemos que el término en el denominador es menor que el término en el numerador, así que la fracción da un número mayor que 1. Esto tiene sentido porque quiere decir que la distancia recorrida por el bus es mayor que la distancia inicial de separación.

Otro método: es claro que la distancia recorrida por el bus es igual a la distancia recorrida por la persona mientras aquel frena, más la distancia inicial que los separa. Y calcular la distancia recorrida por la persona es muy fácil, pues como la persona se mueve con velocidad constante, la distancia es sólo rapidez por tiempo. Si usamos el tiempo de encuentro hallado antes y la rapidez de la persona, la distancia recorrida por ella es

$$d_p = v_p \underbrace{\left(\frac{2d}{v_t - v_p}\right)}_{t}. \tag{23}$$

Esta ecuación nos da la distancia recorrida por la persona mientras el bus frena. Como ya dijimos, la distancia recorrida por el bus es la distancia recorrida por la persona más d, que es la distancia que lo separaba inicialmente de la persona:

$$d_t = \underbrace{v_p\left(\frac{2d}{v_t - v_p}\right)}_{d_p} + d. \tag{24}$$

Si sacamos factor común de d, obtenemos

$$d_t = d\left(\left(\frac{2v_p}{v_t - v_p}\right) + 1\right). \tag{25}$$

Y finalmente, sumamos las fracciones:

$$d_t = d\left(\frac{v_p + v_t}{v_t - v_p}\right). \tag{26}$$

Hemos llegado al mismo resultado de la ecuación (22) —notemos que $v_t - v_p$ es positivo, así que toda la expresión es positiva y podemos obviar el valor absoluto en la ecuación (22).

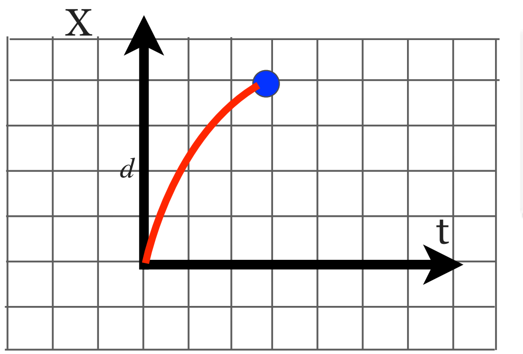
(c) Para hacer una gráfica cualitativa de posición contra tiempo para el bus, sólo necesitamos saber que este sigue un movimiento con aceleración constante negativa, que su posición inicial es cero y que su velocidad inicial es positiva. Según esto, la ecuación de movimiento del bus es de la forma

$$x_{ft}\hat{x} = -\frac{1}{2}at^2\hat{x} + v_t t\hat{x}. \tag{27}$$

Al aplicar la regla de oro, obtenemos

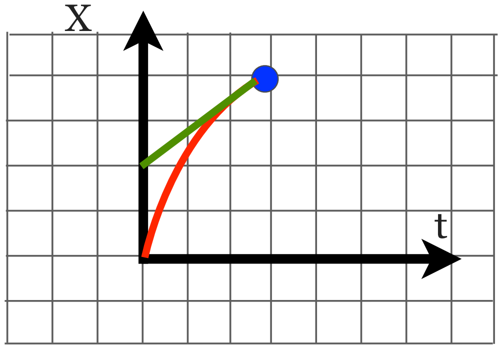
$$x_{ft} = -\frac{1}{2}at^2 + v_t t. \tag{28}$$

Notemos que esta es la ecuación de una parábola que se abre hacia abajo porque el término cuadrático es negativo. Además, la parábola corta el eje Y en cero porque el punto de corte es cero (la posición inicial es cero). Por otro lado, la parábola está corrida en el sentido positivo de X porque el término lineal y el cuadrático tienen signos contrarios. Además, la parábola no alcanza el punto más alto porque cuando el bus alcanza la persona *el bus no ha llegado a velocidad cero* (sólo ha llegado a la velocidad de la persona). Reuniendo estas características, podemos realizar la siguiente gráfica de posición contra tiempo para el bus:



El bus de Transmilenio tiene aceleración negativa. La parábola no alcanza a llegar hasta el punto más alto porque el bus no llega a rapidez cero.

Como la persona se mueve con velocidad constante positiva, la gráfica de posición contra tiempo para la persona es una línea recta con pendiente positiva. Además, la posición inicial de la persona es $d\hat{x}$. Y por otra parte, cuando el bus llega a rapidez v_p, la persona tiene la misma posición, así que la línea recta debe pasar por ese punto en el cual el bus alcanza dicha rapidez. Reuniendo estos requisitos, la gráfica de posición contra tiempo para la persona sería



La persona comienza a una distancia d en el sentido positivo de X, y camina con velocidad constante. Al final su posición se cruza con la del bus de Transmilenio.

Notemos que la inclinación de la línea de la persona coincide con la inclinación del final de la parábola, pues al final el bus alcanza la misma velocidad que tiene la persona (si es necesario, repase el problema 2.18 o el final del problema 2.17).

(d) Para determinar en qué tiempo el bus se detiene completamente, necesitamos usar una ecuación que nos diga cuándo la velocidad es cero. Podemos usar la ecuación

$$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_i \tag{29}$$

y despejar el tiempo para el cual $\vec{v}$ es cero. En nuestro caso, la velocidad inicial del bus es $\vec{v}_t\hat{x}$ y la aceleración está determinada por la ecuación (16). Teniendo en cuenta esto, podemos escribir la ecuación (29) así:

$$\vec{v} = \underbrace{-\frac{(v_t - v_p)^2}{2d}}_{a} t\hat{x} + v_t\hat{x}. \tag{30}$$

Ahora, para determinar en qué tiempo la velocidad es cero, simplemente ponemos cero para la velocidad en la anterior ecuación:

$$0\hat{x} = -\frac{(v_t - v_p)^2}{2d} t\hat{x} + v_t\hat{x}. \tag{31}$$

Si pasamos el primer término de la parte derecha de la igualdad al otro lado, esto queda

$$\frac{(v_t - v_p)^2}{2d} t\hat{x} = v_t\hat{x}. \tag{32}$$

Si dividimos por el término que acompaña al tiempo t y aplicamos la regla de oro obtenemos

$$t = \frac{2d}{(v_t - v_p)^2} v_t. \tag{33}$$

Esta ecuación nos dice el tiempo en el cual el bus llega a su velocidad cero (es decir, el tiempo en el cual se detiene).

Notemos que si la rapidez v_t es igual a v_p la anterior ecuación no está definida y eso tiene sentido porque si ambas rapideces son iguales entonces el bus no tendría aceleración y su velocidad nunca llegaría a cero, lo cual contradice la suposición de que el bus se detiene. Además, si v_t es igual a v_p, la ecuación (22) tampoco estaría definida, lo que también tiene sentido porque la distancia recorrida por el bus sería infinita (sin aceleración nunca alcanzaría a la persona). Por ultimo, si v_t es igual a v_p, la gráfica de posición contra tiempo del bus será una línea recta paralela a la recta de la persona (pues tendrá la misma velocidad) y ambas rectas estarán separadas por la distancia inicial d.

Nota 2.25. ¿En qué tiempo la velocidad es cero?

Para hallar el tiempo en el cual un objeto que se mueve con aceleración constante alcanza velocidad cero, usamos la ecuación $\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_i$ y ponemos que la velocidad es cero: $0 = \vec{a}t + \vec{v}_i$.