Problema 3.19.

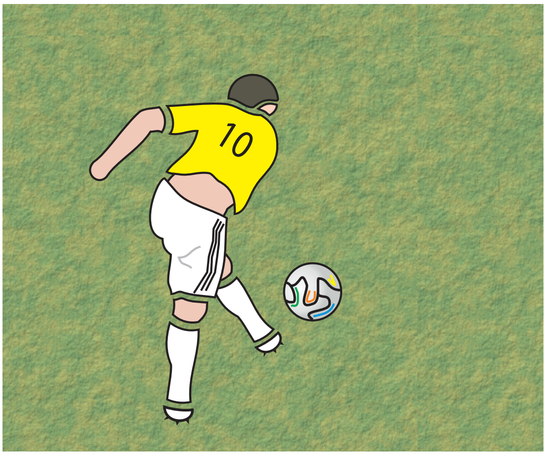
Palabras clave: velocidad inicial, distancia horizontal recorrida, uso se distintos sistemas de coordenadas.

El gol que James Rodríguez hizo en el partido de octavos de final entre Colombia y Uruguay del mundial de Brasil 2014 fue elegido mejor gol de ese año. James le pegó al balón cuando el balón estaba cayendo, el balón pegó en el palo superior de la portería de Muslera (el arquero de Uruguay) y cruzó la línea de gol. El tiempo que voló el balón desde que le pegó James hasta que tocó el palo fue de aproximadamente 0.9 segundos. La altura sobre el piso desde la cual le pegó James fue de aproximadamente 31.5 centímetros. La altura a la que está el palo superior es de 2.44 metros. Además, James le pegó al balón cuando estaba a más o menos 26.5 metros del arco. Usando un sistema de coordenadas cuyo origen esté en el prado justo debajo del punto de impacto, responda:

(a) ¿Cuál fue la velocidad con la que salió el balón al ser impactado por James?

(b) Aproximadamente a qué distancia horizontal (en X) de la línea de gol se encontraba el balón cuando llegó a su altura máxima?

(c) Responda de nuevo (a) pero usando un sistema cuyo origen esté justo en el punto de impacto (no en el prado) y según el cual el eje Y apunta hacia abajo.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) La altura inicial desde la cual salió el balón fue aproximadamente de 31.5 centímetros. El tiempo de vuelo del balón desde que salió disparado hasta que tocó el palo es de 0.9 segundos. La distancia entre el arco y el punto de impacto es de más o menos 26.5 metros. La altura a la que está el palo es de 2.44 metros. Debemos usar un sistema de coordenadas en el piso justo debajo del punto de impacto.

(c) Debemos usar un sistema como el de antes pero con el eje Y apuntando hacia abajo.

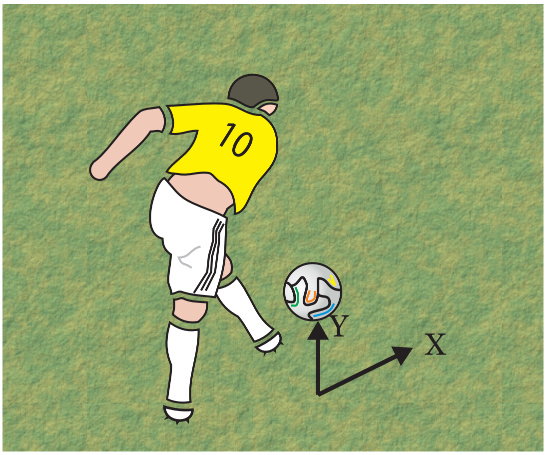
¿Qué nos piden?

(a) Debemos decir la velocidad con la que salió el balón al ser impactado por James.

(b) Encontrar la distancia horizontal entre la línea de gol y el balón cuando el balón está en su altura máxima.

(c) Responder (a) con un sistema de coordenadas cuyo eje Y apunte hacia abajo.

(a) No debemos escoger un sistema de coordenadas porque en el enunciado nos dicen que usemos uno con el origen en el pasto y justo debajo de balón:



Para determinar la velocidad con la que salió el balón al ser pateado por James, necesitamos encontrar las componentes X y Y de esta velocidad. Una vez encontramos estas componentes, podemos hallar la magnitud y dirección de la velocidad inicial.

Comencemos por hallar la velocidad en X del balón. La distancia total recorrida en X por el balón es de 26.5 metros. Además, el balón recorre esta distancia en un tiempo de 0.9 segundos. Por lo tanto, como en X distancia es rapidez por tiempo, tenemos

$$(26.5 \text{ m}) = v_x(0.9 \text{ s}). \tag{1}$$

Así que la rapidez v_x es

$$\frac{(26.5 \text{ m})}{(0.9 \text{ s})} = 29.44 \text{ m/s} = v_x. \tag{2}$$

Para hallar la rapidez inicial en Y podemos usar la ecuación de movimiento en Y, pues conocemos el tiempo de vuelo, la posición final en Y y la posición inicial en Y. Según nuestro sistema de coordenadas, la posición inicial del balón es $(0.315 \text{ m})\hat{y}$ (hemos pasado 31.5 cm a metros). La posición final es $(2.44 \text{ m})\hat{y}$, que es cuando el balón toca el poste, la aceleración es g y es negativa, y el tiempo de vuelo es de 0.9 segundos. Por último, la rapidez inicial en Y debe ser positiva (el balón sale hacia arriba). Por lo tanto, la ecuación de movimiento en Y queda así:

$$\underbrace{(2.44 \text{ m})\hat{y}}_{y_f\hat{y}} = -\frac{1}{2}(9.81 \text{ m/s}^2)(\underbrace{0.9 \text{ s}}_{t})^2\hat{y} + v_{iy}(\underbrace{0.9 \text{ s}}_{t})\hat{y} + \underbrace{(0.315 \text{ s})\hat{y}}_{y_i\hat{y}}. \tag{3}$$

Si aplicamos la regla de oro, dejamos el término que tiene v_{iy} solo a la derecha y sumamos todo lo que se puede sumar, esta ecuación queda

$$6.10 \text{ m} = v_{iy}(0.9 \text{ s}). \tag{4}$$

Finalmente, si dividimos entre el tiempo esto da

$$\frac{6.09 \text{ m}}{0.9 \text{ s}} = 6.78 \text{ m/s} = v_{iy}. \tag{5}$$

Ahora que conocemos tanto la rapidez en X como la rapidez inicial en Y podemos hallar la rapidez inicial total. Recordemos que la magnitud de un vector está dada por la raíz cuadrada de la suma de la magnitud de cada componente al cuadrado, así que en este caso tenemos

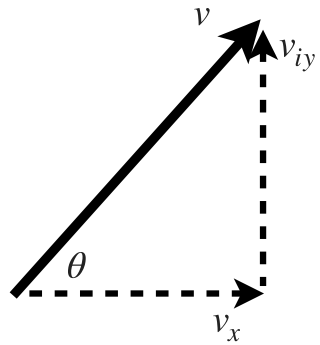
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_{iy}^2}. \tag{6}$$

Si usamos la rapidez en X dada por la ecuación (2) y la rapidez inicial en Y dada por la ecuación (5), la ecuación (6) queda

$$v = \sqrt{(\underbrace{29.44 \text{ m/s}}_{v_x})^2 + (\underbrace{6.78 \text{ m/s}}_{v_{iy}})^2} = 30.21 \text{ m/s}. \tag{7}$$

En palabras, la rapidez con la que salió el balón fue de 30.21 metros por segundo, que es igual a 108.76 kilómetros por hora. Sólo nos falta hallar la dirección en la cual salió disparado el balón.

La dirección es fácil de hallar porque conocemos ambas componentes y también conocemos la magnitud de la velocidad inicial. Como ya hemos hecho en varios problemas, la componente X es adyacente al ángulo de lanzamiento y la componente Y es opuesta al ángulo:



La rapidez inicial en Y es el cateto opuesto y la rapidez inicial en X es el cateto adyacente.

Por lo tanto, la componente X sobre la magnitud de la velocidad inicial (que es la hipotenusa) nos da el coseno del ángulo:

$$\frac{v_x}{v} = \frac{29.44 \text{ m/s}}{30.21 \text{ m/s}} = 0.97 = \cos\theta. \tag{8}$$

Así que θ es

$$\theta = \arccos(0.97) = 12.88°. \tag{9}$$

Así, la velocidad inicial tiene magnitud de 30.21 metros por segundo y apunta en dirección de 12.88 grados con respecto al eje X, medidos en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

(b) Para hallar la distancia horizontal entre el balón y la línea de gol cuando el balón alcanza su altura máxima, debemos determinar cuánta distancia ha recorrido el balón a lo largo de X cuando llega a su altura máxima. Para hallar esta distancia, necesitamos la rapidez en X que ya conocemos y el tiempo de altura máxima que no conocemos. Recordemos (nota 3.10) que este tiempo de altura máxima está dado por

$$\frac{v_{iy}}{g} = t_m. \tag{10}$$

Según la ecuación (5), v_{iy} es 6.78 m/s. Así que el tiempo de altura máxima es

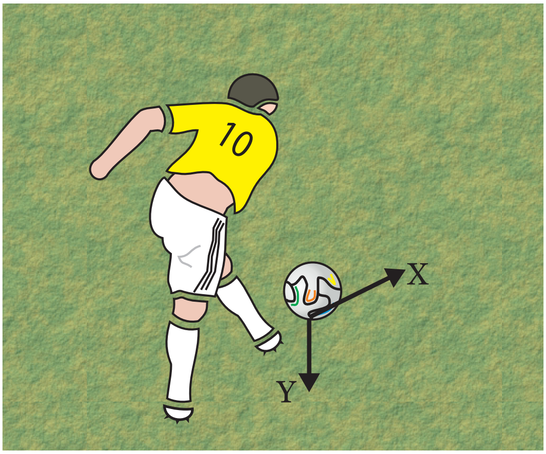
$$\frac{\overbrace{6.78 \text{ m/s}}^{v_{iy}}}{9.81 \text{ m/s}} = 0.69 \text{ s}. \tag{11}$$

Como en X distancia es rapidez por tiempo, en este tiempo la distancia recorrida es

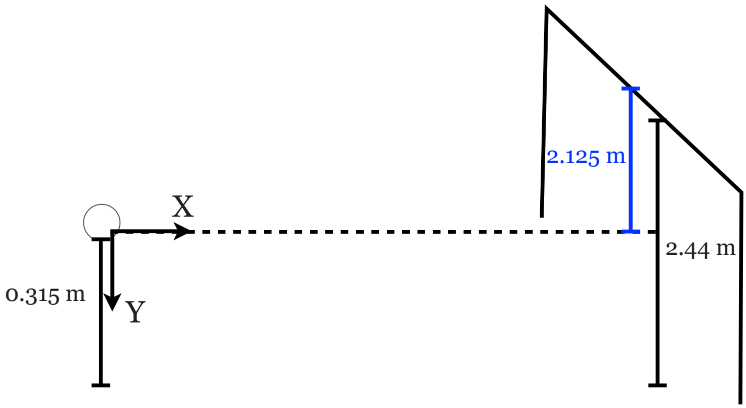
$$d_x = \underbrace{(29.44 \text{ m/s})}_{v_x}\underbrace{(0.69 \text{ s})}_{t} = 20.31 \text{ m.} \tag{12}$$

Entre la línea de meta y el punto de impacto hay una distancia de 26.5 metros en X. Según la ecuación (12), el balón ha recorrido 20.31 metros en X. Por lo tanto, el balón está a 26.5 m-20.31 m = 6.19 m de la línea de gol. Es decir, cuando llega a su altura máxima el balón casi está en el área pequeña del arquero (en las cinco con cincuenta), lo que explica lo difícil que era para el arquero atajarlo.

(c) Ahora debemos usar un sistema cuyo origen esté en el punto de impacto del balón y cuyo eje Y apunte hacia abajo, tal como se indica a continuación:



La rapidez en X es la misma porque la distancia recorrida en X sigue siendo la misma y porque el tiempo sigue siendo el mismo. Así que la ecuación (1) sigue siendo válida. Ahora, para hallar la rapidez inicial en Y debemos volver a usar la ecuación de movimiento en Y, sólo que ahora esta ecuación tiene otra forma. Primero, la posición inicial en Y es cero con el nuevo sistema. En segundo lugar, la velocidad inicial en Y es negativa porque ahora hacia arriba es negativo y la aceleración de la gravedad es ahora positiva. Finamente, con respecto a este sistema nuevo la altura final es de 2.44 m-0.15 m = 2.125 m, como se aprecia a continuación:



Con respecto al nuevo sistema, la altura del poste es de 2.125 metros (en azul) y no de 2.44 metros, pues el nuevo sistema está a 0.315 metros sobre el pasto.

Como la altura final está en la parte negativa del eje Y del nuevo sistema, debe ir con un signo menos. Así, la ecuación de movimiento en Y para el balón según este sistema queda

$$\underbrace{-(2.125\ \text{m})\hat{y}}_{y_f\hat{y}} = +\frac{1}{2}(9.81\ \text{m/s}^2)(\underbrace{0.9\ \text{s}}_{t})^2\hat{y} - v_{iy}(\underbrace{0.9\ \text{s}}_{t})\hat{y} + (\underbrace{\ 0\ \text{m}\ }_{y_i\hat{y}})\hat{y}. \tag{13}$$

Si pasamos el término que tiene v_{iy} al lado izquierdo y movemos los otros términos a la derecha, sumamos lo que se pueda sumar y aplicamos la regla de oro, obtenemos

$$v_{iy}(0.9\ \text{s}) = 6.10\ \text{m}. \tag{14}$$

¡Este es exactamente el mismo resultado que el dado por la ecuación (4)! Así que no es necesario continuar, pues podemos repetir los mismos pasos de antes y llegaremos a la misma rapidez inicial en Y. El ángulo θ también es el mismo, pues lo seguimos midiendo tal como antes con respecto al eje X.

No nos debería sorprender que la rapidez inicial sea la misma pues recordemos que las magnitudes de los vectores no cambian si cambiamos de sistema, y la rapidez es la magnitud de la velocidad (nota 2.3). El lector puede pensar que todo da lo mismo con este nuevo sistema pero en realidad no; la velocidad inicial en Y y la aceleración de la gravedad son diferentes porque son negativas. Como hemos comprobado en distintas ocasiones, las direcciones no siempre se preservan cuando cambiamos de sistema de coordenadas.