Problema (teórico) 3.5.

Palabras clave: caída libre, tiempo de viaje del sonido cuando un objeto toca el suelo, lanzamiento vertical, altura máxima, velocidad inicial.

Matías deja caer una piedra desde un puente que está a una altura desconocida sobre un río. Dos segundos después Matías oye el sonido de la piedra chocando en el agua.

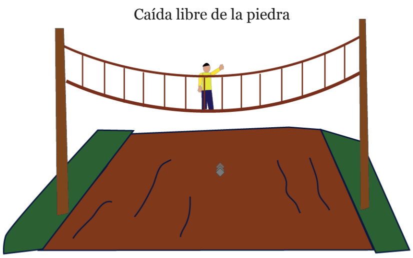
(a) Si la rapidez del sonido es de 343 m/s, ¿cuál es la altura con respecto al río desde la cual Matías dejó caer la piedra?

Suponga ahora que Matías lanza la piedra de modo vertical hacia arriba desde la misma altura inicial hallada en (a) (ver la figura derecha). Esta vez Matías oye el sonido de la piedra al tocar el río 8 segundos después de que lanza la piedra.

(b) ¿Qué tipo de movimiento sigue la piedra desde que Matías la lanza hasta que toca el agua?

(c) ¿Cuál fue la velocidad con la cual Matías lanzó la piedra hacia arriba?

(d) Encuentre el tiempo que le tomó a la piedra llegar hasta la altura máxima de su recorrido y diga cuál fue la altura máxima alcanzada.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) Nos dicen que la piedra cae de forma libre sobre el río, que Matías oye el sonido de la piedra al tocar el agua dos segundos después de haberla soltado y que la rapidez del sonido es de 343 m/s.

(b) Matías lanza la piedra de forma vertical hacia arriba desde la misma altura que antes, y pasan ocho segundos desde que la lanza hasta que oye el sonido de la piedra entrando al río.

¿Qué nos piden?

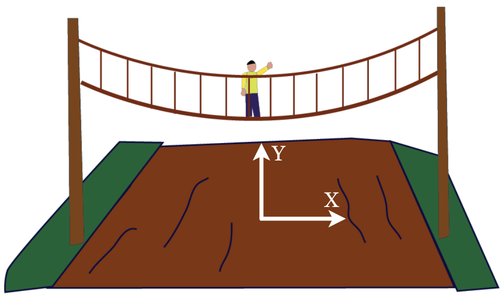
(a) Encontrar la altura sobre el río desde la cual Matías suelta la piedra.

(b) Explicar qué tipo de movimiento sigue la piedra desde que se lanza hasta que toca el agua.

(c) Determinar la velocidad con la cual Matías lanzó la piedra hacia arriba.

(d) Hallar el tiempo que le tomó a la piedra llegar a la altura máxima, y hallar la altura máxima que alcanzó.

(a) Comenzamos, como es costumbre, por escoger un sistema de coordenadas. Escojamos uno en el cual el origen se encuentre en el río, y el eje Y apunte hacia arriba (hacia el puente), como se ilustra a continuación:



Debemos encontrar la altura h desde la cual Matías suelta la piedra. Como en todo movimiento en caída libre, la piedra tiene aceleración gravitacional con dirección hacia el piso y tiene velocidad inicial cero. La posición inicial de la piedra es $h\hat{y}$ (es positiva porque el puente está en la parte positiva de nuestro sistema de coordenadas). Así que la ecuación de movimiento de la piedra es

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + h\hat{y}. \tag{1}$$

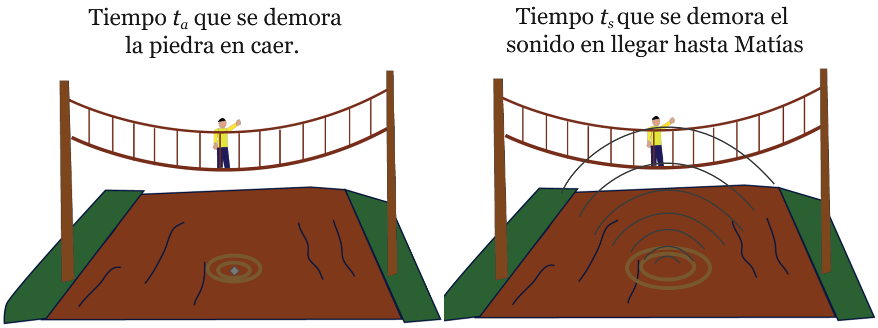
Cuando la piedra toca el río la altura final de la piedra es la posición cero porque el río está en el origen de nuestro sistema, así que la anterior ecuación nos da

$$0\hat{y} = -\frac{1}{2}gt_a^2\hat{y} + h\hat{y}, \tag{2}$$

donde hemos llamado t_a al tiempo que le toma a la piedra llegar al agua. De aquí nos interesa hallar h pero no conocemos el tiempo t_a que corresponde al tiempo en el cual la piedra llega al río.

Sin embargo, aún no hemos usado toda la información; nos dicen que Matías oye el sonido de la piedra al tocar el agua dos segundos después de que suelta la piedra, y nos dicen la rapidez del sonido. El sonido se produce justo en el instante en que la piedra toca el agua y ese sonido debe llegar hasta el oído de Matías, así que podemos entender los dos segundos así: en un tiempo desconocido t_a la piedra llega al río y después, en un tiempo desconocido t_s, el sonido viaja desde el agua hasta la altura h desde donde Matías soltó la piedra. Es decir, el tiempo que le toma a la piedra tocar el agua sumado con el tiempo que le toma al sonido llegar desde el río hasta la altura h debe dar dos segundos:

$$t_a + t_s = 2\ \text{s}. \tag{3}$$



El tiempo que se demora Matías en escuchar el sonido de la piedra al caer el agua es la suma del tiempo t_a que se demora la piedra en caer, más el tiempo t_s que le toma al sonido subir hasta donde está Matías.

Además, como conocemos la rapidez del sonido, podemos escribir una ecuación que relacione el tiempo t_s, la rapidez del sonido y la altura h. Recordemos que cuando la velocidad es constante distancia es rapidez por tiempo. En nuestro caso, sabemos que el sonido debe llegar desde el agua hasta la altura h en un tiempo t_s. Es decir, la altura a la que está Matías debe ser igual a la rapidez del sonido multiplicada por el tiempo t_s que le toma al sonido recorrer esa distancia:

$$h = v_s t_s. \tag{4}$$

Por supuesto, no conocemos t_s ni h, pero sí conocemos la rapidez del sonido y, además, la ecuación (3) nos permite escribir t_s en términos de t_a:

$$t_s = 2\ \text{s} - t_a. \tag{5}$$

Así que la ecuación (4) queda

$$h = \underbrace{(343\ \text{m/s})}_{v_s}\underbrace{(2\ \text{s} - t_a)}_{t_a}. \tag{6}$$

Esta es una ecuación que relaciona la altura h con t_a, así que podemos usar esto en la ecuación (2) para que todo nos quede en términos de una variable desconocida, t_a:

$$0\hat{y} = -\frac{1}{2}gt_a^2\hat{y} + \underbrace{(343\ \text{m/s})(2\ \text{s} - t_a)}_{h}\hat{y}. \tag{7}$$

Primero, abramos los paréntesis y apliquemos la regla de oro:

$$0 = -\frac{1}{2}gt_a^2 + (686\ \text{m}) - (343\ \text{m/s})t_a. \tag{8}$$

Si usamos el valor de g, esta ecuación queda

$$0 = -\frac{1}{2}(9.81\ \text{m/s}^2)t_a^2 + (686\ \text{m}) - (343\ \text{m/s})t_a. \tag{9}$$

Notemos que esta es una ecuación cuadrática en el tiempo t_a, es decir, una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. En este caso a (el término que acompaña a t_a^2) es igual a $-\frac{1}{2}(9.81\ \text{m/s}^2)$, b (el término que acompaña a t_a) es $-(343\ \text{m/s})$ y c (la constante) es $(686\ \text{m})$. Por lo tanto, el tiempo t_a será igual a

$$t_a = \frac{\overbrace{(343\ \text{m/s})}^{-b} \pm \sqrt{\overbrace{(-343\ \text{m/s})}^{b}{}^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\overbrace{(9.81\ \text{m/s}^2)}^{g}\right)\overbrace{(686\ \text{m})}^{c}}}{2\left(-\frac{1}{2}\underbrace{(9.81\ \text{m/s}^2)}_{g}\right)}. \tag{10}$$

Esto nos da dos soluciones:

$$t_a = -71.87\ \text{s}, \tag{11}$$

y

$$t_a = 1.95\ \text{s}. \tag{12}$$

La primera solución no tiene sentido porque nos da un tiempo negativo. Así que la solución correcta debe de ser la segunda. En palabras, la piedra tarda un tiempo de 1.95 segundos en caer al agua. Con este tiempo podemos hallar la altura inicial h que buscamos. Por ejemplo, si usamos el tiempo que acabamos de hallar en la ecuación (6) obtenemos

$$h = (343\ \text{m/s})(2\ \text{s} - \underbrace{1.95\ \text{s}}_{t_a}) = 17.15\ \text{m}. \tag{13}$$

(b) Esta vez Matías lanza la piedra hacia arriba, o sea que la piedra no sigue un movimiento en caída libre porque la velocidad inicial no es cero. ¿Qué tipo de