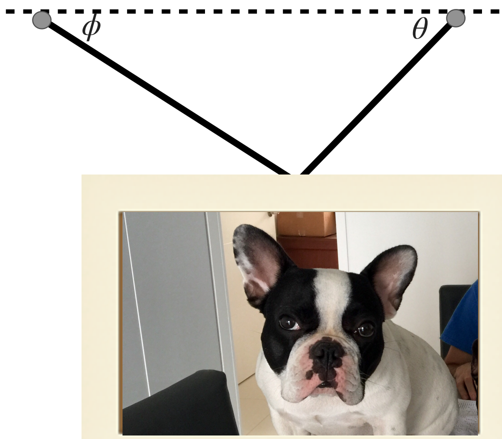
Problema 4.17.

Palabras clave: objeto suspendido de cuerdas ideales, objeto en equilibrio, tensión.

El marco de un cuadro con una foto tiene masa m, y el marco yace en equilibrio suspendido de dos hilos que se sostienen con unas puntillas, como se ilustra en el dibujo. Suponga que los hilos funcionan como cuerdas ideales. Si nos dicen que la magnitud de la tensión sobre el hilo izquierdo es T_1 y conocemos el ángulo ϕ,

(a) Escriba una expresión para el valor del ángulo θ, en términos de m, T_1 y ϕ. Con base en esta expresión, diga qué pasaría si T_1 tendiera a cero.

(b) Con base en lo hecho antes y si la masa del marco es de 1 kilogramo, si ϕ es de 30 grados y si T_1 es 8 N, ¿cuál es la magnitud y dirección de la fuerza que cada hilo hace sobre la respectiva puntilla en la que está cogido?



Solución

¿Qué información nos dan?

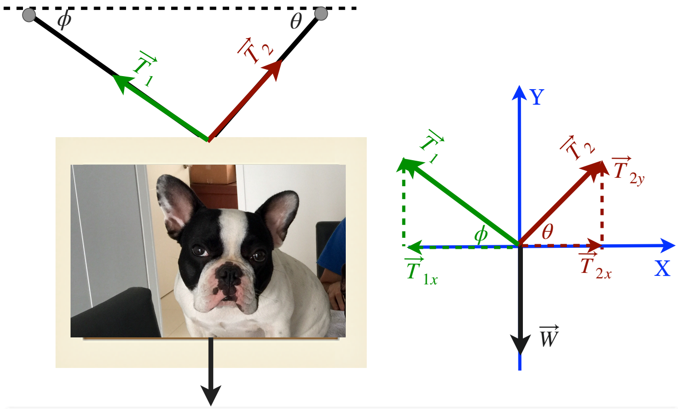
(a) Conocemos la masa m del marco, el ángulo ϕ y la magnitud de la tensión sobre el hilo izquierdo T_1. Además, nos dicen que podemos tratar los hilos como cuerdas ideales y nos dicen que el marco está en equilibrio.
(b) La masa del marco es de un kilogramo, ϕ es de 30 grados y T_1 es 8 N.

¿Qué nos piden?

(a) Debemos hallar una expresión para el ángulo θ en términos de m, T_1 y ϕ. Con base en esta expresión debemos decir qué pasaría si T_1 tendiera a cero.

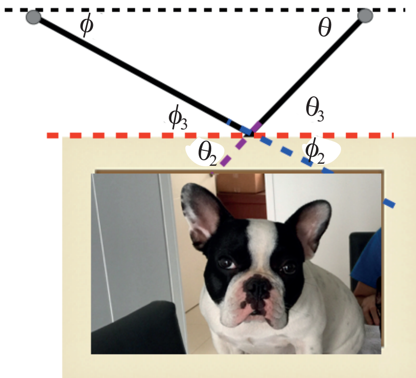
(b) Usando lo hecho en (a) debemos hallar la magnitud y dirección de la fuerza que cada hilo hace sobre la respectiva puntilla en la que está cogido.

(a) Comencemos por realizar el diagrama de fuerza usando un sistema de coordenadas con el eje Y apuntando hacia arriba:



Sobre el marco actúan tres fuerzas; las dos tensiones y el peso. Si usamos un sistema de coordenadas con el eje Y apuntando hacia arriba, entonces debemos descomponer las dos tensiones.

Notemos en el diagrama que el ángulo que se forma entre $\vec{T}_2$ y $\vec{T}_{2x}$ es igual a θ y el ángulo que se forma entre $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_{1x}$ es igual a ϕ. Esto se puede explicar con la siguiente figura:



Si trazamos una línea paralela (en rojo) a la línea negra superior, y extendemos los hilos con otras líneas (morada y azul para el hilo izquierdo y el derecho respectivamente), podemos notar que el ángulo θ_2 que se forma entre la línea roja y la morada es igual a θ, y ϕ_2 que se forma entre la línea roja y la azul es igual a ϕ. Una vez notamos esto, podemos ver que θ_3 es un ángulo opuesto a θ_2 y ϕ_3 es un ángulo opuesto a ϕ_2, y los ángulos opuestos siempre son iguales. Por lo tanto, θ_3 y θ_2 son iguales y ϕ_2 y ϕ_3 también son iguales, y como θ_2 es igual a θ y ϕ_2 es igual a ϕ, entonces por transitividad $\phi = \phi_3$ y $\theta = \theta_3$, que es lo que queríamos mostrar.

Ahora que tenemos el diagrama de fuerzas podemos plantear la segunda ley de Newton para hallar una expresión para el ángulo θ. Nos dicen que el marco está en equilibrio, esto quiere decir que el marco permanece en reposo sin aceleración, así que la aceleración en X y Y tiene que ser cero.

Nota 4.19. Sistema en equilibrio

Cuando un objeto está en equilibrio su aceleración es cero. Esto implica que todas las componentes de su aceleración son cero.

Comencemos por plantear las ecuaciones en X. En X tenemos dos fuerzas: $\vec{T}_{1x}$ y $\vec{T}_{2x}$. Como se ve en el diagrama de fuerzas, $\vec{T}_{1x}$ apunta en el sentido negativo del eje X y $\vec{T}_{2x}$ en el positivo. Por lo tanto, según la segunda ley de Newton, tenemos

$$T_{2x}\hat{x} - T_{1x}\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{1}$$

Como el marco está en equilibrio, la aceleración es cero, así que esta ecuación queda

$$T_{2x}\hat{x} - T_{1x}\hat{x} = 0\hat{x}. \tag{2}$$

Aplicando la regla de oro y pasando $\vec{T}_{1x}$ al otro lado, obtenemos

$$T_{2x} = T_{1x}. \tag{3}$$

Ahora notemos en el diagrama de fuerzas que $T_{1x} = T_1 \cos\phi$ y $T_{2x} = T_2 \cos\theta$, así que la ecuación (3) se puede escribir así:

$$\underbrace{T_2 \cos\theta}_{T_{2x}} = \underbrace{T_1 \cos\phi}_{T_{1x}}. \tag{4}$$

T_2 y θ son variables desconocidas, así que de esta ecuación no podemos despejar θ. Busquemos más ecuaciones.

Analicemos lo que sucede en Y. En Y tenemos tres fuerzas: el peso y las componentes verticales de ambas tensiones. El peso tiene signo negativo según nuestro sistema, mientras que $\vec{T}_{1y}$ y $\vec{T}_{2y}$ tienen signo positivo. Por la segunda ley de Newton tenemos

$$T_{2y}\hat{y} + T_{1y}\hat{y} - W\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{5}$$

Otra vez usamos que el sistema está en equilibrio, así que esta ecuación queda

$$T_{2y}\hat{y} + T_{1y}\hat{y} - W\hat{y} = 0\hat{y}. \tag{6}$$

Se puede ver en el diagrama de fuerzas que $T_{1y} = T_1 \sin\phi$ y que $T_{2y} = T_2 \sin\theta$. Además, $W = mg$. Así, podemos escribir la ecuación (6) del siguiente modo:

$$\underbrace{T_2 \sin\theta\,\hat{y}}_{T_{2y}} + \underbrace{T_1 \sin\phi\,\hat{y}}_{T_{1y}} - mg\hat{y} = 0. \tag{7}$$

Esta ecuación tiene dos incógnitas: T_2 y θ. Pero ya teníamos otra ecuación con esas mismas incógnitas, la ecuación (4). Así que podemos usar la ecuación (4) para despejar una de las incógnitas en términos de la otra incógnita, y usar el resultado en la ecuación (7) para despejar la otra incógnita.

Si despejamos T_2 de la ecuación (4), obtenemos

$$T_2 = \frac{T_1 \cos\phi}{\cos\theta}. \tag{8}$$

Ahora podemos usar este resultado en la ecuación (7):

$$\underbrace{\left(\frac{T_1 \cos\phi}{\cos\theta}\right)}_{T_2} \sin\theta\hat{y} + T_1 \sin\phi\hat{y} - mg\hat{y} = 0. \tag{9}$$

Esta ecuación sólo tiene una incógnita: θ. Para despejar θ, comencemos por poner todos los términos que no tienen θ al otro lado, y apliquemos la regla de oro:

$$\left(\frac{T_1 \cos\phi}{\cos\theta}\right) \sin\theta = -T_1 \sin\phi + mg. \tag{10}$$

Además, en el primer término tenemos $\sin\theta$ sobre $\cos\theta$, y eso es igual a $\tan\theta$:

$$T_1 \cos\phi \tan\theta = -T_1 \sin\phi + mg. \tag{11}$$

Ahora podemos dividir por $T_1 \cos\phi$ para dejar $\tan\theta$ sola:

$$\tan\theta = \frac{-T_1 \sin\phi + mg}{T_1 \cos\phi}. \tag{12}$$

Finalmente, si aplicamos arcotangente a ambos lados obtenemos la expresión para θ:

$$\theta = \arctan\left(\frac{-T_1 \sin\phi + mg}{T_1 \cos\phi}\right). \tag{13}$$

Con esta expresión debemos decir qué pasaría si T_1 tendiera a cero. Notemos en esta expresión que si T_1 tiende a cero, la división tiende a infinito y arcotangente de infinito tiende a 90 grados. Esto tiene sentido porque si T_1 es cero, es como si el marco sólo estuviera sostenido por el hilo derecho y entonces el hilo derecho va a formar un ángulo de 90 grados, como se ilustra a continuación:

CONTINÚA