Problema 5.9.

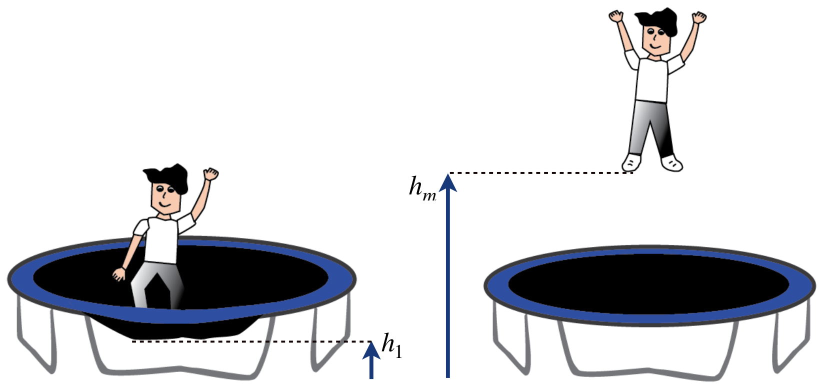
Palabras clave: objeto que cae sobre un resorte, máxima compresión, máxima altura alcanzada debido a un resorte.

Suponga que Camilo cae en un brinca-brinca. Suponga que el brinca-brinca se puede modelar como un resorte ideal que se comprime o se estira y que tiene constante k. Camilo salta sobre el brinca-brinca y lo comprime hasta que este le da un impulso suficiente para que alcance una altura máxima h_m. Cuando Camilo comprime el brinca-brinca, se encuentra a una altura h_1 del piso (ver dibujo).

(a) Escriba una expresión para la máxima compresión del brinca-brinca.

(b) Escriba una expresión para la rapidez de Camilo justo cuando sus pies se despegan del brinca-brinca (antes de que se eleve).

(c) Cuando cae por segunda vez sobre el brinca-brinca, ¿Camilo va a comprimir más o menos el brinca-brinca que lo que lo comprimió en el primer salto? Y con el impulso que le dará el brinca-brinca en este segundo salto, ¿Camilo va a alcanzar más o menos altura que en el primero?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) y (c) El brinca-brinca se puede modelar como un resorte ideal de constante k. Después de que salta, el brinca-brinca le da un impulso a Camilo suficiente para llegar a una altura máxima h_m. Cuando Camilo comprime el brinca-brinca, se encuentra a una altura h_1 del piso.

¿Qué nos piden?

(a) Escribir una expresión para la máxima compresión del brinca-brinca.

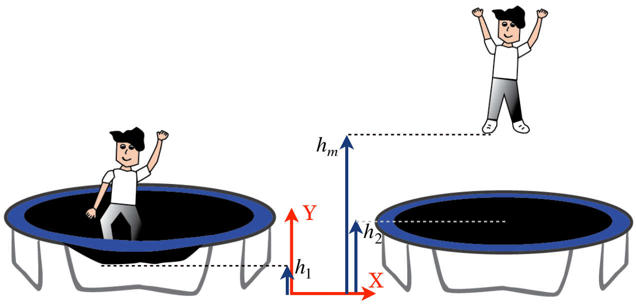
(b) Escribir una expresión para la rapidez de Camilo justo cuando sus pies se despegan del brinca-brinca.

(c) Decir si en el segundo salto sobre el brinca-brinca, este se comprime más o menos y decir si Camilo va a alcanzar más o menos altura después de que salte esa segunda vez.

Solución

(a) Para escribir una expresión para la máxima compresión del brinca-brinca debemos encontrar la energía potencial elástica del brinca-brinca en el momento de su máxima compresión. Tengamos en cuenta que como sobre Camilo sólo actúan el peso y la fuerza del brinca-brinca (que se modela como un resorte ideal), entonces la energía mecánica del sistema conformado por Camilo y el brinca-brinca se conserva.

Ahora, para plantear las ecuaciones de la energía mecánica debemos escoger un sistema de coordenadas que nos permita medir la altura de Camilo en diferentes momentos para medir la energía potencial gravitacional. Escojamos un sistema cuyo origen esté en el piso (de esta forma podemos usar directamente la altura máxima h_m y la altura h_1 que están medidas con respecto al piso):



Escogemos un sistema de coordenadas con el origen en el piso. La altura h_1 cuando Camilo comprime el brinca-brinca es conocida; la altura h_2 justo cuando Camilo se despega del brinca-brinca en su salto es desconocida; y la altura h_m que es la máxima altura que alcanza Camilo después de saltar es conocida.

La energía mecánica en el punto de máxima compresión es energía potencial elástica del brinca-brinca y energía potencial gravitacional de Camilo, pues Camilo no tiene energía cinética en ese momento (en el instante en que Camilo está en el punto más bajo, no tiene rapidez). Si llamamos x a la compresión del brinca-brinca en ese punto, entonces podemos escribir la energía mecánica en ese punto así:

$$E_{m1} = \frac{1}{2}kx^2 + mgh_1. \tag{1}$$

Para despejar x debemos usar la conservación de la energía, así que debemos usar la energía mecánica en otro momento. Como conocemos la altura máxima del salto de Camilo, podemos usar la energía en ese momento; en ese punto la energía mecánica es sólo energía potencial gravitacional (el brinca-brinca no está comprimido así que no tiene energía potencial elástica, y Camilo no se está moviendo porque la rapidez en el punto más alto es cero):

$$E_{m2} = mgh_m. \tag{2}$$

Si aplicamos la conservación de la energía mecánica entre el punto de máxima compresión y el punto de máxima altura, obtenemos

$$\underbrace{\frac{1}{2}kx^2 + mgh_1}_{E_{m1}} = \underbrace{mgh_m}_{E_{m2}}. \tag{3}$$

Si despejamos la energía potencial elástica, esto nos da

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh_m - mgh_1. \tag{4}$$

Si multiplicamos por 2 y dividimos por k, lo anterior da

$$x^2 = \frac{2}{k}(mgh_m - mgh_1). \tag{5}$$

Si sacamos factor común de mg y sacamos la raíz cuadrada, obtenemos

$$x = \sqrt{\frac{2mg}{k}(h_m - h_1)}. \tag{6}$$

Esta es la expresión para la compresión del brinca-brinca que debíamos hallar. Notemos dos cosas: cuanto mayor es la diferencia entre la altura máxima y h_1, mayor es x. Esto tiene sentido porque el resorte se tiene que comprimir más para que pueda elevar a Camilo hasta una altura mayor. Mayor compresión significa mayor energía potencial elástica y por ende más energía le puede transmitir el brinca-brinca a Camilo. Por otro lado, notemos que cuanto mayor es k menor es la compresión, y esto tiene sentido porque si k es muy grande, el brinca-brinca hace más fuerza y entonces es mas difícil estirarlo o comprimirlo.

(b) Para hallar la rapidez de Camilo justo cuando se despega del brinca-brinca debemos encontrar la energía cinética de Camilo justo en ese momento (y con esa energía podemos despejar la rapidez). Y para encontrar la energía cinética debemos aplicar de nuevo la conservación de la energía mecánica.

Cuando Camilo está en el momento en que se despega, tenemos dos tipos de energía: energía cinética y energía potencial gravitacional (en ese instante no hay energía potencial elástica porque el brinca-brinca no está estirado ni comprimido):

$$E_{mb} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh_2. \tag{7}$$

Ahora, no conocemos h_2 pero podemos usar x (que ya conocemos por el numeral anterior) y h_1 para determinar h_2. Notemos de la figura anterior que $h_1 + x = h_2$, así que la ecuación (7) se puede escribir como

$$E_{mb} = \frac{1}{2}mv^2 + mg\underbrace{(x + h_1)}_{h_2}. \tag{8}$$

(Todavía no reemplazamos x para no complicar las ecuaciones innecesariamente). Ahora podemos volver a usar la conservación de la energía mecánica. Igualamos la energía E_{mb} con la energía E_{m2}:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + mg(x + h_1)}_{E_{mb}} = \underbrace{mgh_m}_{E_{m2}}. \tag{9}$$

Si ahora despejamos la energía cinética, obtenemos

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_m - mg(x + h_1). \tag{10}$$

Ahora podemos simplificar m, multiplicar por 2 y sacar factor común de g en el lado derecho:

$$v^2 = 2g(h_m - x - h_1). \tag{11}$$

Si ahora usamos la ecuación (6) para x y sacamos la raíz cuadrada, obtenemos

$$v = \sqrt{2g\left(h_m - h_1 - \underbrace{\sqrt{\frac{2mg}{k}(h_m - h_1)}}_{x}\right)}. \tag{12}$$

(c) Después de que Camilo llega a la altura máxima h_m, vuelve a caer en el brinca-brinca. Es sencillo notar que la compresión va a ser la misma que antes porque las ecuaciones que vamos a usar son exactamente las mismas; para hallar la compresión máxima debemos usar la ecuación (1). Además, para usar la conservación de la energía somos libres de usar cualesquier puntos del movimiento y resulta que la altura final de Camilo después de la primera vez que salta es la *altura inicial* para el segundo salto. Es decir, la energía mecánica inicial para el segundo salto es precisamente la energía mecánica final del primer salto, la cual está dada por la ecuación (2). Por lo tanto, vamos a volver a igualar la ecuación (1) con la (2) (sólo que está vez la ecuación (2) corresponde al punto inicial del movimiento), y así obtendremos la misma compresión del resorte.

Así como la compresión es la misma, la altura final después del segundo salto es la misma. Si la compresión es la misma, la energía potencial elástica también lo es y entonces, por conservación de energía, la energía mecánica final en la altura máxima del segundo salto debe ser igual a esa energía en la altura máxima del primer salto. Si Camilo alcanzara más o menos altura, entonces su energía mecánica habría cambiado comparada con el primer caso, pero no puede cambiar porque la energía mecánica se conserva[7].

[7] La única forma de que la altura del segundo salto cambie es si tenemos en cuenta la fricción del aire o si usamos un resorte no ideal. En ese caso se perdería energía, así que Camilo cada vez alcanzaría una altura menor (pronto veremos casos en los que la energía no se conserva).