Problema (teórico) 2.3.

Palabras clave: vector posición, desplazamiento, desplazamiento neto, distancia, distancia neta, movimiento por tramos.

Una persona camina desde su casa 32 metros en la dirección negativa del eje Y, hasta un edificio blanco (su casa está en el origen del sistema). En ese punto gira y comienza a caminar en la dirección negativa de X por 16 metros, hasta llegar a una tienda. Después, camina 200 metros con una dirección de 45 grados con respecto al eje X (medidos en el sentido contrario a las manecillas del reloj), hasta que se encuentra con un amigo. Finalmente, camina en línea recta una dirección desconocida, hasta que llega de nuevo a su casa.

(a) Realice un dibujo esquemático de la situación (no tiene que ser un dibujo a escala).

(b) Diga cuál es la dirección desconocida en la que caminó desde que se encuentra con su amigo hasta que retorna a su casa, y diga qué distancia caminó en esa dirección.

(c) Calcule la distancia total del recorrido.

(d) Calcule el vector del desplazamiento neto entre la casa y la tienda.

Solución

¿Qué información nos dan?

Una persona camina 32 metros en el sentido negativo de Y. Después camina 16 metros en el sentido negativo de X. Luego camina 200 metros con un ángulo de 45 grados sobre X, medido en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Finalmente, camina hasta regresar a su casa.

¿Qué nos piden?

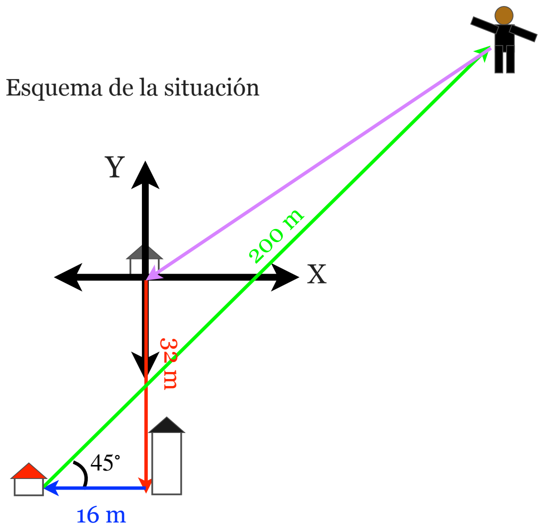
(a) Un esquema de la situación.

(b) La distancia recorrida desde que se encuentra con su amigo hasta que regresa a su casa. Además, debemos hallar la dirección en la que camina esa distancia.

(c) La distancia total recorrida.

(d) El desplazamiento neto entre la casa y la tienda.

(a) Empecemos por hacer un dibujo de la situación:



Primero la persona camina 32 m en la dirección negativa de Y (vector rojo) hasta un edificio blanco. Después camina 16 m en la dirección negativa de X (vector azul) hasta una tienda. Luego camina 200 metros, 45 grados por encima de X (vector verde) hasta que se encuentra un amigo. Finalmente, regresa al origen (vector morado), donde está su casa.

(b) Debemos encontrar la magnitud y dirección del vector morado. Como la persona regresó al punto de partida, sabemos que el desplazamiento total es cero (nota 2.4). Esto quiere decir que la suma de los cuatro vectores de desplazamiento debe darnos el vector nulo. Llamemos $\vec{v}_r$ al vector rojo, $\vec{v}_a$ al azul, $\vec{v}_v$ al verde y $\vec{v}_m$ al morado que queremos hallar. Como dijimos, como el desplazamiento total es cero, la suma de los cuatro debe ser cero:

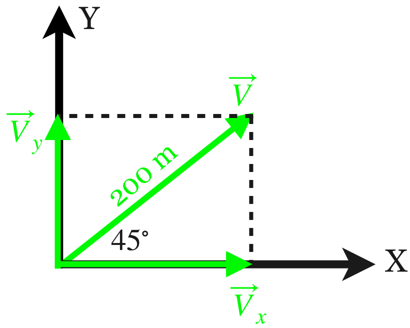
$$\vec{v}_r + \vec{v}_a + \vec{v}_v + \vec{v}_m = \vec{0}. \tag{1}$$

Nosotros queremos hallar el vector morado. De la anterior ecuación se sigue que

$$\vec{v}_m = -\vec{v}_r - \vec{v}_a - \vec{v}_v. \tag{2}$$

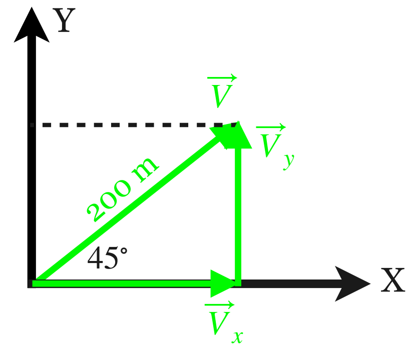
Como conocemos los vectores rojo, azul y verde, podemos hallar el vector morado usando la anterior ecuación. Primero, escribamos los tres vectores conocidos en términos de sus componentes.

Como el vector rojo tiene magnitud de 32 m y apunta en la dirección negativa de Y, lo podemos escribir como $\vec{v}_r = -(32\text{ m})\hat{y}$. El vector azul tiene dirección negativa en X y magnitud de 16 metros, así que lo podemos escribir como $\vec{v}_a = -(16\text{ m})\hat{x}$. Por último, el vector verde no lo podemos escribir en términos de sus componentes porque no lo hemos descompuesto. Así que el siguiente paso es descomponer el vector verde. Para hacerlo, situamos el vector en un sistema de coordenadas y proyectamos el vector en el eje X y Y (hacemos los tres pasos explicados en el capítulo 1, nota 1.8, en un solo paso):



Descomponemos el vector.

Ahora podemos mover la componente Y para formar un triángulo rectángulo entre las componentes:



Formamos un triangulo rectángulo moviendo la componente Y.

El anterior triángulo rectángulo muestra con claridad que la magnitud de la componente Y del vector sobre la magnitud del vector original es seno de 45 grados

$$\sin 45^\circ = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}\|} = \frac{\|\vec{V}_y\|}{200\ \mathrm{m}}. \tag{3}$$

Por lo tanto, la magnitud de la componente Y es

$$(200\ \mathrm{m}) \sin 45^\circ = \|\vec{V}_y\| = (100\sqrt{2})\ \mathrm{m}, \tag{4}$$

donde usamos el hecho de que $\sin 45° = \sqrt{2}/2$. La dirección de la componente Y apunta en la dirección positiva de Y, así que podemos escribir esta componente como

$$\vec{V}_y = (100\sqrt{2}\ \mathrm{m})\hat{y}. \tag{5}$$

En la figura también se ve que la componente X sobre la magnitud del vector original es igual al coseno de 45 grados:

$$\cos 45° = \frac{\|\vec{V}_x\|}{\|\vec{V}\|} = \frac{\|\vec{V}_x\|}{200\ \mathrm{m}}. \tag{6}$$

Así, la magnitud de la componente X es

$$(200\ \mathrm{m})\cos 45° = \|\vec{V}_x\| = (100\sqrt{2})\ \mathrm{m}, \tag{7}$$

donde usamos el hecho de que $\cos 45° = \sqrt{2}/2$. La dirección de la componente X apunta en la dirección positiva de X, así que podemos escribir esta componente como

$$\vec{V}_x = (100\sqrt{2}\ \mathrm{m})\hat{x}. \tag{8}$$

Ahora que conocemos ambas componentes, podemos escribir el vector verde de la siguiente manera:

$$\vec{V}_v = (100\sqrt{2}\ \mathrm{m})\hat{x} + (100\sqrt{2}\ \mathrm{m})\hat{y}. \tag{9}$$

Como ya conocemos todos los vectores en términos de sus componentes, podemos escribir de nuevo la ecuación (2) así:

$$\vec{V}_m = -(-32\ \mathrm{m})\hat{y} - (-16\ \mathrm{m})\hat{x} - ((100\sqrt{2}\ \mathrm{m})\hat{x} + (100\sqrt{2}\ \mathrm{m})\hat{y}). \tag{10}$$

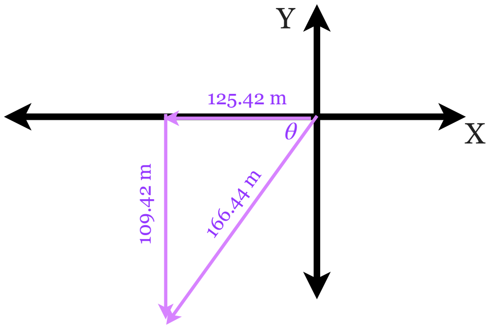
Si sumamos los términos en X y los términos en Y, y sólo tenemos en cuenta las primeras dos cifras decimales, obtenemos

$$\vec{V}_m \approx -(125.42\ \mathrm{m})\hat{x} - (109.42\ \mathrm{m})\hat{y}. \tag{11}$$

La anterior ecuación nos muestra directamente las componentes del vector morado. Usando esas componentes podemos calcular la magnitud del vector, pues recordemos que la magnitud de un vector es la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de la magnitud de cada componente (nota 1.9). Por lo tanto, la magnitud de $\vec{V}_m$ es

$$\|\vec{V}_m\| \approx \sqrt{(125.42\ \mathrm{m})^2 + (109.42\ \mathrm{m})^2} \approx 166.44\ \mathrm{m}. \tag{12}$$

También podemos obtener la dirección del vector a partir de las componentes. Para hacer eso, situamos el vector en el origen del sistema de coordenadas y formamos un triángulo con sus componentes:



Formamos un triángulo con el vector y sus componentes. La dirección la determina θ.

Determinar el ángulo θ es fácil porque conocemos las componentes. La tangente de θ es igual a la magnitud del cateto opuesto al ángulo θ sobre la magnitud del cateto adyacente a ese mismo ángulo. En este caso, tenemos

$$\tan\theta = \frac{109.42 \text{ m}}{125.42 \text{ m}} \approx 0.87. \tag{13}$$

Por lo tanto, θ es igual a

$$\arctan(0.87) = 41.02^\circ \approx \theta. \tag{14}$$

Así, la dirección del vector está dada por un ángulo de 41.02 grados con respecto al eje X, medido en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

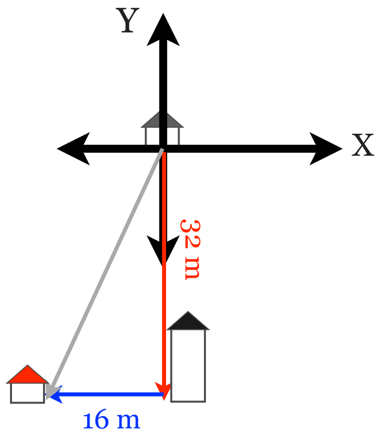
(c) La distancia total recorrida es la suma de la distancia recorrida en cada uno de los cuatro desplazamientos (recordemos que la distancia es la magnitud del desplazamiento). En el primer tramo la persona caminó 32 metros, en el segundo 16 metros, en el tercero 200 metros y en el último caminó 166,44 metros. Por lo tanto, la distancia total es

$$d_t = 32 \text{ m} + 16 \text{ m} + 200 \text{ m} + 166.44 \text{ m} = 414.44 \text{ m} \tag{15}$$

(d) La casa está en el origen del sistema, y la tienda está en el punto donde el vector azul termina. Llamemos a este punto $\vec{x}_T$. Así, el desplazamiento desde la casa hasta la tienda es la resta entre la posición de la tienda y la posición de la casa. Llamemos $\vec{x}_T$ a la posición de la tienda y $\vec{x}_c$ a la de la casa. Como la casa está en el origen, $\vec{x}_c$ es cero y este desplazamiento queda

$$\vec{D}_{tc} = \vec{x}_T - \vec{x}_c = \vec{x}_T. \tag{16}$$

Si lo dibujamos, este vector es simplemente el vector que va del origen a la tienda:

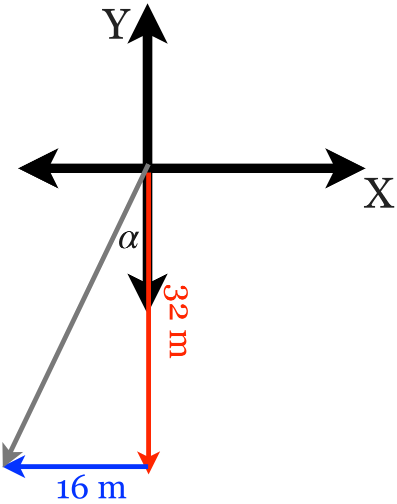


El vector del desplazamiento entre la casa y la tienda es el vector gris dibujado en el plano.

Es claro que las componentes Y y X de este vector gris son los vectores rojo y azul respectivamente. Como conocemos el vector rojo y azul, es muy sencillo hallar el vector gris. La magnitud del vector gris es

$$\|\vec{V}_m\| = \sqrt{(16\ \mathrm{m})^2 + (32\ \mathrm{m})^2} \approx 35.78\ \mathrm{m}. \tag{17}$$

Podemos determinar la dirección a partir del ángulo α que hay entre el vector rojo y el vector gris:



El ángulo α nos permite indicar la dirección del vector.

La tangente de α es igual a la magnitud del cateto opuesto a α sobre la magnitud del cateto adyacente a α. En este caso, tenemos

$$\tan\alpha = \frac{16 \text{ m}}{32 \text{ m}} = 0.5 \text{ m}. \tag{18}$$

Así, α es igual a

$$\arctan(0.5) = 26.56^\circ = \alpha. \tag{19}$$

Entonces, la dirección del vector gris es de 26.56 grados medidos con respecto al eje Y en el sentido de las manecillas del reloj.